



TITLE:

# オプション価格情報を用いた市場 予測 (不確実性下における意思決定 問題)

AUTHOR(S):

田中, 健太郎; 宮崎, 浩一

---

CITATION:

田中, 健太郎 ...[et al]. オプション価格情報を用いた市場予測 (不確実性下における意思決定問題). 数理解析研究所講究録 2011, 1734: 109-116

ISSUE DATE:

2011-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170771>

RIGHT:

## オプション価格情報を用いた市場予測

電気通信大学 田中 健太郎(Kentaro Tanaka) 宮崎 浩一(Koichi Miyazaki)

University of Electro-Communications

### 1. はじめに

オプションとは、満期日において対象資産(以下、原資産、株式などを想定されたい)を取り決めた価格(以下、権利行使価格)で買う(コール・オプション)又は売る(プット・オプション)ことができる権利のことである。オプション市場では、この権利(オプション)が売買されており、商品特性からコール・オプションの価格は、満期日に原資産が権利行使価格よりも高くなる可能性が大きいと想定される場合に高くなり、逆の場合には安くなる。プット・オプションに関しても同様に考えられる。つまり、オプションの市場価格データには、市場参加者が想定する原資産に関しての満期時点における価格情報が含まれていると考えられる。

オプション価格に織り込まれたリスク中立分布を抽出する研究の起源は、Breedon and Litzenberger (1978)に遡り、以降、ツリーモデルや様々な分布形を仮定したリスク中立分布の抽出やその形状に表れる投資家の市場予想に関する研究が盛んに行われてきた。数多くある文献の中からごく一部を挙げると、Rubinstein (1994), Buchen and Kelly (1996), Jackwerth and M. Rubinstein (1996), Nomura and Miyazaki(2006)などがある。近年では、オプションから抽出したリスク中立分布のみならず、投資家のリスク回避度も考慮したうえでオプション市場価格に含まれる投資家の相場観情報が研究されており、このような先行研究に Bliss and Panigirtzoglou (2004), Liu et al. (2007), 田中・宮崎・岡本(2009)がある。本研究では、リスク中立分布としてパラメトリックモデルを採用し、日本の株式オプション市場に関する実証分析を試みた田中・宮崎・岡本(2009)を補う形の実証分析を試みる。

田中・宮崎・岡本(2009)では、Liu et al. (2007)とは違い、オプションを価格付けする時点までに観測可能な株価データから推定されるヒストリカル分布をある種の事前分布と想定し、それをオプション市場参加者が自らの相場観に基づいて修正したいわば事後分布に相当するものとしてリスク中立分布を捉えている。よって、ヒストリカル分布もリスク中立分布と同じ分布形を想定し、対数尤度に基づく実現株価との整合性が両分布でどの程度異なるかについて検証している。分布形としては、分析対象期間に市場が混乱したサブプライムショック後の時期も含まれるため、原資産がジャンプするような動きも捉えることが可能なジャンプ拡散モデルの分布形も導入する。そして、オプション市場価格へのオーバー・フィッティングの問題も議論可能なように単純な対数正規分布(BS モデル)も採用している。また、リアル分布に関しては、Liu et al. (2007)とは違い、推定時点までに利用可能な過去のリスク中立分布と対応する満期の株価から推定されたリスク回避度を用いて現時点のリスク中立分布をリアル分布へ変換し、アウトサンプルデータに基づきリアル分布の実現株価との整合性を計量したうえで、これら3つの分布を比較検討している。

先に、本研究では、田中・宮崎・岡本(2009)を補う形の実証分析を試みると述べたが、新たに追加された主な点は、次の2点である。第一に、田中・宮崎・岡本(2009)では、オプションの残存期間を5営業日、10営業日、20営業日の3通りしか試みていないのに対して、本研究では、10営業日から40営業日までの全ての残存期間を対象に分析を行った点である。これは、分析対象が僅か3点であると、これらの残存期間固有の偶然の影響が現れる場合には、必ずしも多くの残存期間について当てはまる安定的な結果とはいえない可能性があるからである。第二に、実証分析対象期間を延ばして、株式市場の混乱が最も大きかったリーマンショック以降の時期も分析対象としたことである。これによって、ジャンプ拡散モデルの分布形の有効性がどの程度であるかについての検証がより興味深いものとなる。

本論文の構成は以下の通り。次節では、3種類の株価モデルの分布形を導入する。3節では、分析手法について述べ、4節では実証分析結果と考察を与える。最終節では、まとめと結語を付す。

## 2. 株価モデル

### 2.1 Black-Scholes モデル (BS モデル)

$S_T$ 、 $S_0$ をそれぞれ満期時点及び初期時点の株価、 $r$ は無リスク金利、 $\sigma$ はボラティリティとする。満期時点の株価 $S_T$ は式(1)の対数正規分布( $\theta = (\sigma)$ )に従う。

$$g_{BS}(S_T | \theta) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi T}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln S_T - (\ln S_0 + rT - 0.5\sigma^2 T)}{\sigma \sqrt{T}} \right]^2 \right) \quad (1)$$

### 2.2 混合対数正規モデル (MLN モデル)

本モデルのパラメータセット $\theta$ は、各対数正規分布の平均 $F_i$  ( $i=1,2$ )、ボラティリティ $\sigma_i$  ( $i=1,2$ )、ウェイト $w$ の5つであり、 $\theta = (F_1, F_2, \sigma_1, \sigma_2, w)$ となる。

$$g_{MLN}(S_T | \theta) = w g_{LN}(S_T | F_1, \sigma_1, T) + (1-w) g_{LN}(S_T | F_2, \sigma_2, T) \quad (2)$$

$$g_{LN}(S_T | F_i, \sigma_i, T) = \frac{1}{S_T \sigma_i \sqrt{2\pi T}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln S_T - [\ln F_i - 0.5\sigma_i^2 T]}{\sigma_i \sqrt{T}} \right]^2 \right) \quad (3)$$

### 2.3 ジャンプ拡散モデル (MJD モデル)

MJDモデルは、株価のダイナミクスを幾何ブラウン運動にジャンプを加えてBSモデルを拡張したモデルであり、株価を $dS_t/S_t = (r - \lambda\beta)dt + \alpha dW_t + (Y-1)dN_t$ によってモデル化する。 $Y$ をジャンプ幅率の確率変数、 $N_t$ はインテンシティを $\lambda$ とするポアソン過程を表す確率変数、 $\beta$ はジャンプ幅率の期待値、 $\sigma$ は拡散項のボラティリティでとし、ジャンプ幅率の確率変数 $Y$ の対数を取ったものが平均 $\mu_J$ 、分散 $\delta^2$ の正規分布に従うと仮定する。このとき、満期における株価の従う確率密度関数( $\theta = (\lambda, \beta, \sigma, \delta)$ )は、式(4)で与えられる。

$$g_{MJD}(S_T | \theta) = \frac{\exp(-\lambda T)}{S_T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k \exp \left( -\frac{(\ln S_T - \ln S_0 - \psi T - k\mu_J)^2}{2(\sigma^2 T + k\delta^2)} \right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 T + k\delta^2)}} \quad (4)$$

ここで、 $k$ はジャンプ回数を表す。

$$\psi = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\beta \quad (5)$$

$$\mu_j = \ln(1 + \beta) - \frac{1}{2}\delta^2 \quad (6)$$

### 3. 分析手法

ここではリスク中立分布, リアル分布, ヒストリカル分布の導出法と分析手法について述べる.

#### 3.1 リスク中立分布の導出法

リスク中立分布のパラメータセット $\theta$ は, 2節で述べた株価モデルに基づくコール(C), プット(P) オプション価格 ( $C(K_i | \theta, r, T), P(K_i | \theta, r, T)$ ) と対応するオプション市場価格 ( $C_{market}(K_i), P_{market}(K_i)$ ) との差の2乗和を最小化することにより推定する. この差の2乗和が小さいほど, モデルのオプション価格がオプション市場価格へのフィットが良いことを表している. 最小化の対象となる目的関数は, 式(7)で与えられる. また  $K_i$  は権利行使価格を表し,  $i=1$  でアットザマネー(以下 ATM)オプションの権利行使価格,  $i=2$  でアウトオブザマネー(以下 OTM)1 の権利行使価格,  $i=3$  で OTM2 の権利行使価格, 以下同様に各オプションの権利行使価格を示す.

$$\frac{1}{N+M} \left\{ \sum_{i=1}^N ((C_{market}(K_i) - C(K_i | \theta, r, T))^2) + \sum_{i=1}^M ((P_{market}(K_i) - P(K_i | \theta, r, T))^2) \right\} \quad (7)$$

#### 3.2 リアル分布の導出手法と実現株価の整合性の検証法

投資家の効用は必ずしもリスク中立ではないので, 投資家が本来的に想定する株価分布は, 彼等のリスク回避度に依存するものである. よって, その株価分布は, リスク中立分布をベースにしてリスク回避度の影響を考慮した分布であり, これをリアル分布と呼ぶ. 本研究では, リアル分布を導く際の効用関数  $U(x)$  としてベキ型  $x^{1-\gamma}/1-\gamma$  を仮定する. ここで  $\gamma$  はリスク回避度である. リアル分布  $\tilde{g}(x)$  は, リスク中立分布  $g(x)$  と,  $U(x)$  を一階微分した限界効用関数  $U'(x)$  を用いて以下のように表せる.

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(x)/U'(x)}{\int_0^\infty g(y)/U'(y)dy} = \frac{x^\gamma g(x)}{\int_0^\infty y^\gamma g(y)dy} \quad (8)$$

先行研究では, リアル分布を推定する際のリスク回避度  $\gamma$  を, 推定期間を通して一定と仮定している. 加えて, オプション市場の投資家が合理的であると仮定し, 投資家の想定するオプションの満期時点における株価のリアル分布が満期時点の実現株価と最も整合的となるようにリスク回避度を推定している. 具体的には, 分析期間における全てのオプションの満期時点  $i$ ,  $i=1, \dots, n$  におけるリスク中立分布(パラメータセット  $\theta_i$  は推定済み)と未知パラメータであるリスク回避度から構成されるリアル分布  $\tilde{g}(x | \theta_i, \gamma)$  と実現株価  $S_{T_i}$  を用いて得られる対数尤度関数(式(9))を最大化することにより,  $\gamma$  を推定してリアル分布を導出する. この場合, 対数尤度に基づくリアル分布の実現株価に対する整合性は原理的に必ずリスク中立分布に勝ることとなる. このため, Liu et al. (2007)のリアル分布の実現株価に対する整合性に関する分析は不適切といわざ

るを得ない。

$$\ln(L(S_{T,1}, S_{T,2}, \dots, S_{T,n} | \gamma)) = \sum_{i=1}^n \ln(\tilde{g}(S_{T,i} | \theta, \gamma)) \quad (9)$$

そこで本研究では、現時点から適切な期間だけ遡った(ここでは、10 期間、20 期間、30 期間を採用する)リスク中立分布と実現株価を用いて、先と同様にリスク回避度を推定する。得られたリスク回避度を利用して、現時点の次に満期を迎えるリスク中立分布をリアル分布に変換する。同様の手順を逐次繰り返せば、リアル分布を導出する時点までにのみ利用可能な情報に基づいてリアル分布を導出することができる。このように導出されたリアル分布と実現株価に基づいて対数尤度(この場合、式(12)のリスク回避度は推定済みでありかつオプションの満期  $i$  に依存したものとなっている)を求めれば、リアル分布の実現株価に対する整合性を先に求めたリスク中立分布や次節で導出するヒストリカル分布の整合性と比較することに意義が出てくる。

### 3.3 ヒストリカル分布の導出法

ヒストリカル分布は、将来の株価リターン(対数リターン)の分布が現時点から適切な期間だけ遡った(ここでは、50 期間を採用する)時点までの株価をサンプリングして得られる株価リターンの分布に従うと仮定し導出する。現時点から過去 50 期間の株価リターンを基に最尤法から各モデルに関するヒストリカル分布のパラメータセット  $\theta$  を推定する。

## 4. 実証分析

### 4.1 データ

分析に用いるオプションデータは、2003 年 6 月から 2010 年 7 月までの各月に満期を迎える日経 225 コール・オプションとプット・オプションである。分析対象となる分析期間が 10 営業日から 40 営業日であるため、オプションの残存期間が 10 営業日から 40 営業日のオプションデータを用いる。尤度関数の評価に用いる実現株価は特別清算指数(Special Quotation)を採用した。なお本研究における分析対象期間はゼロ金利政策下であったことや無担保コール翌日物がほぼ 0 に等しかったため、無リスク金利は 0 と設定した。

実証分析は、リアル分布の実現株価の整合性の分析を除き(データ数の制約のため)、上記の期間を市場が安定していた期間である 2003 年 6 月から 2007 年 7 月の 50 期間(“安定期”と呼ぶ)と 2007 年 8 月から 2010 年 7 月の 36 期間(この期間は、サブプライムショック後のリーマンショックを含む期間であり、“混乱期”と呼ぶ)に分割し、これらの期間を対象とした分析を試みる。

### 4.2 分析結果と考察

#### 4.2.1 オプション市場価格との整合性

安定期におけるオプションモデル価格とオプション市場価格との絶対誤差の平均を図 1-a に、混乱期におけるものを図 1-b に示した。図 1-a から BS モデルのフィッティングが他の 2 つのモデルに大きく劣ることがわかる。これは BS モデルが、投資家の想定するリスク中立分布の高次モーメントの影響を捉えることができないためであると考えられる。また、BS モデルでは、営業日が長くなるに従って価格誤差が大きくなっているが、これは残存期間が長くなるとオプション価

格自体が高くなるため、残存期間が長くなるにしたがって誤差が増大するからである。

混乱期では、何れのモデルに関してもオプション市場価格へのフィッティングは絶対値ベースで安定期よりも悪くなるが（安定期とは縦軸のスケールが異なることに注意）、特に、BSモデルの価格誤差は絶対値ベースで極めて大きいことがわかる。他のモデルのフィッティングは、BSモデルとの比較において相対的には安定期よりも優れている。何れの残存期間においても総じてフィッティングが良好なモデルはMJDモデルである。MJDモデルは原資産プロセスにジャンプを加えたモデルである。混乱期にしばしば見られる株価が上下に大きくジャンプするような動きがリスク中立分布にも反映されおり、MJDモデルはこれを捉えることができたのではないかと考えられる。

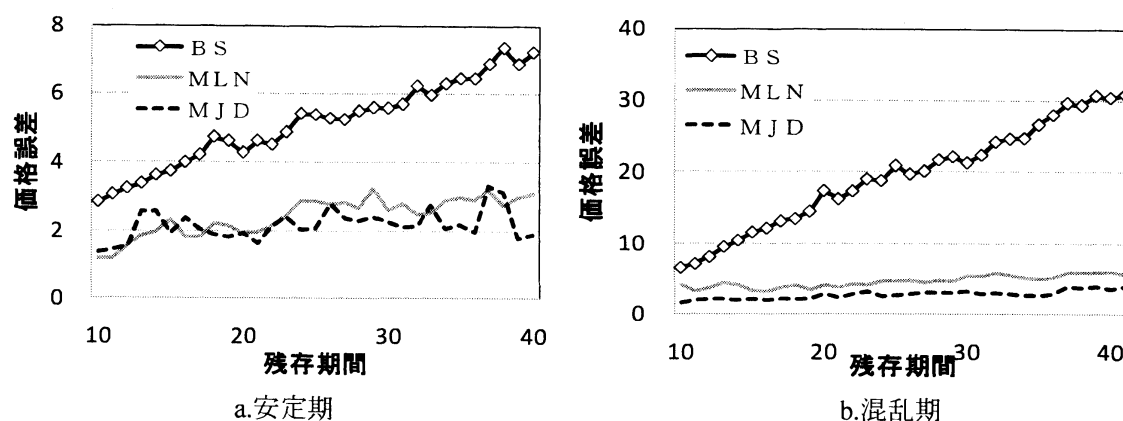
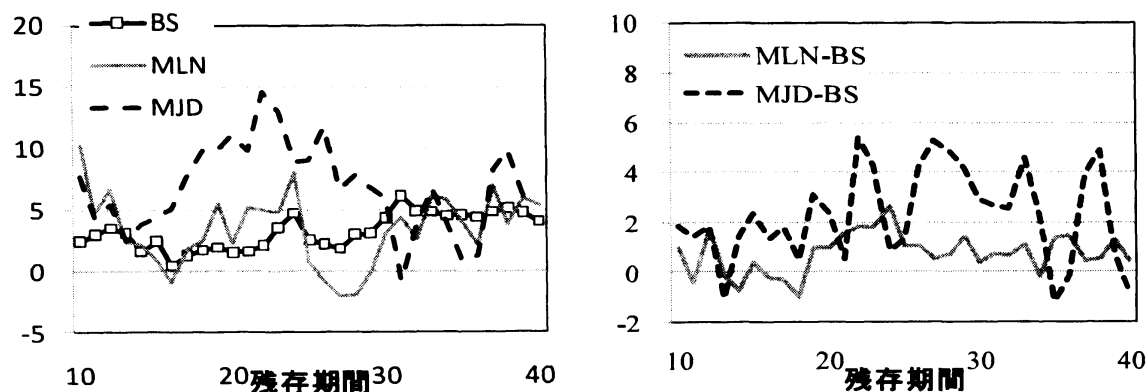


図1 価格誤差

#### 4.2.2 リスク中立分布とヒストリカル分布の実現株価の整合性

安定期における実現株価に対する整合性を比較するために、図2-aに同じ確率密度関数を用いたリスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度の差、図2-bにリスク中立分布のMLNとMJDの対数尤度とBSの対数尤度の差を示した。図2-aをみるとほとんどの場合でリスク中立分布の対数尤度がヒストリカル分布のものよりも大きく、リスク中立分布はヒストリカル分布よりも実現株価の整合性が概して高いといえる。つまり、相場の安定期においてはヒストリカル分布をオプション市場参加者が的確な相場観に基づいて修正するような形でリスク中立分布(オプション市場価格)を与えていることがわかる。続いてリスク中立分布内の各モデルを比較すると、図2-bから多くの残存期間でMLNやMJDモデルの対数尤度がBSモデルの対数尤度を上回っていることが確認できる。このことからオプション市場価格から導出されるインプライドリスク中立分布における歪度、尖度などの高次モーメントが実現株価に対する整合性をいくらか高める要因になっていることが分かる。よって、安定期においては、オプション市場価格へのフィッティングを高めるようなモデル化が、同時に、おおむね実現株価の整合性も向上させることになる。この点については田中・宮崎・岡本(2009)においても指摘したことであるが、残存期間を20営業日から40営業日へと延ばした場合でも確認されたことになる。

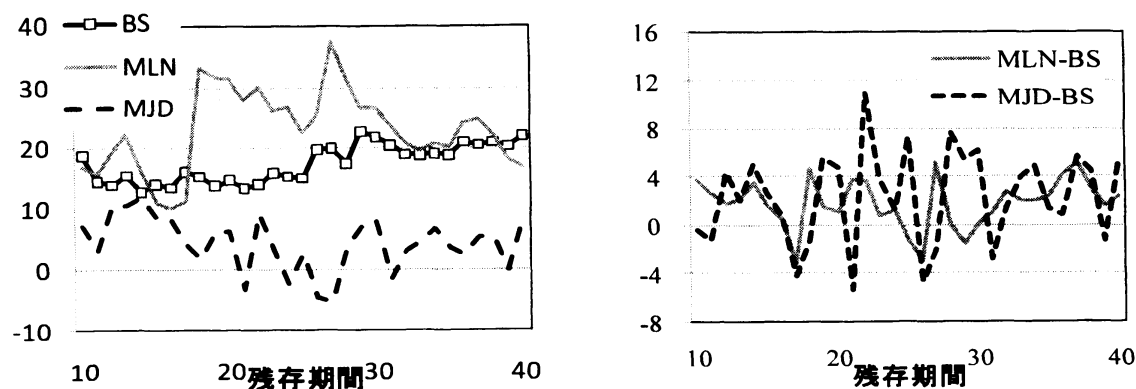


a. リスク中立分布の尤度－ヒストリカル分布の尤度

b. (MLN, MJD)モデルの尤度－BSモデル尤度

図2 対数尤度の差(安定期)

混乱期における実現株価に対する整合性を比較するために、図3-aに同じ確率密度関数を用いたリスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度の差、図3-bにリスク中立分布のMLNとMJDの対数尤度とBSの対数尤度の差を示した。混乱期においても、リスク中立分布の対数尤度がヒストリカル分布の対数尤度よりも概して大きくなっている。混乱期は、サブプライム問題のため株価が大きく落ち込んだ時期やそこからの回復期が含まれており、ヒストリカル分布ではこの株価の動きを捉えることは難しかったことが伺える。しかし、図3-bのリスク中立分布のMLNモデル、MJDモデルとBSモデルの対数尤度の差を見ると、MJDやMLNモデルの対数尤度がBSモデルの対数尤度を下回るケースも安定期と比べると比較的多く現れる。混乱期は100年に1度の経済状況であったと言われるように投資家が将来の株価のダイナミクスを予測することが難しい時期であったため、歪度、尖度といった高次モーメントまでをオプション価格に織り込んでプライシングすることがしばしば困難であったことが想定される。このことから、オプション市場価格へのフィッティングを高めるような高次モーメントを柔軟に与えることが可能なモデル化は、混乱期においても概して有効ではあるものの、幾つかの時点においてはオプション市場価格のノイズ部分（的確な株価予想を織り込んだとはいえない部分）を抽出するような状況を招くことになったため、実現株価の整合性が低下したのではないかと考えられる。



a. リスク中立分布の尤度－ヒストリカル分布の尤度

b. (MLN, MJD)モデルの尤度－BSモデル尤度

図3 対数尤度の差(混乱期)

### 4.2.3 リアル分布の実現株価の整合性

図4は、節3.2に示した分析手法に基づいて、推定時点までに利用可能な情報に基づいて導出したリアル分布の対数尤度とリスク中立分布の対数尤度の差を示したものである。図4のaからcの期間はリスク回避係数を推定するのに用いた期間を表したものである。

ほとんどの場合においてリアル分布の対数尤度はリスク中立分布の対数尤度よりも小さく、リアル分布の株価の整合性はリスク中立分布に劣るケースが多い。Liu et al. (2007)のような事後的な分析ではリアル分布の整合性は必ずリスク中立分布のものを上回る。しかし、現実の株価分布を推定する場合にリアル分布を利用する場合には推定時点までの情報からリスク回避度を推定する必要があること、また、推定されたリスク回避度が推定時点のリスク中立分布をリアル分布へと変換する際のリスク回避度として適切であるかの問題もあって、リアル分布の整合性がリスク中立分布のものよりも高くなるとは限らないことは、オプションの残存期間が20営業日を超えて長くなる場合でも、また、市場の混乱が極めて大きくなったリーマンショック後の時期でも確認される結果となった。

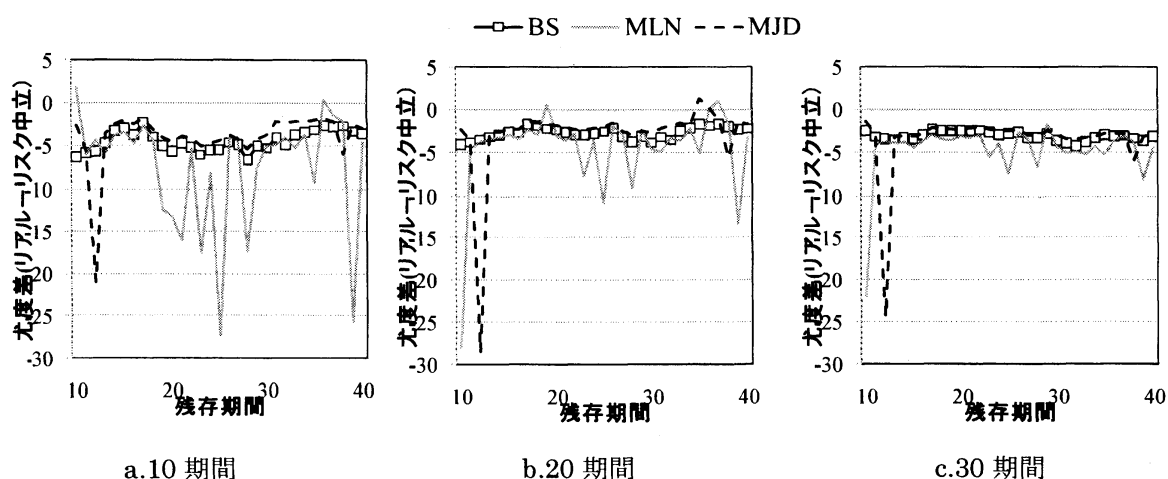


図4 リアル分布とリスク中立分布の対数尤度の差(リアル分布－リスク中立分布)

## 5 まとめと結語

本研究では、日本の株式オプション市場を対象として、オプション市場価格に内在する市場予測力に関する検証（株価の確率密度関数と実現株価との整合性の検証）を試みた田中・宮崎・岡本(2009)を補う形の実証分析を試みた。

新たに追加された主な点は、(1)オプションの残存期間を、10営業日から40営業日までの全ての残存期間を対象に分析を行った点、(2)実証分析対象期間を延ばして、株式市場の混乱が最も大きかったリーマンショック以降の時期も分析対象とした点、である。

オプションモデル価格のオプション市場価格との整合性に関しては、分析対象を(1)、(2)のように拡張した場合でも、リスク中立分布における高次モーメントの影響を柔軟に捉えることができるようなモデル化が相応しく、特にMLNモデルやMJDモデルのフィッティングがBSモデルよりも良好であり、特に、市場の安定期よりも混乱期に顕著に現れることは田中・宮崎・岡本(2009)と



同様であった。

実現株価をどの程度予測できたかについては、安定期においてリスク中立分布には、ヒストリカル分布よりも市場参加者の的確な相場観が反映され、対数尤度が大きく整合性が高くなった。また投資家の相場観を柔軟に抽出することができる MLN, MJD モデルの実現株価に対する整合性が BS モデルよりも高い。その反面、市場の混乱期においては、オプション市場価格との整合性の高い (MLN,MJD) モデルが必ずしも株価予測力が高いといえないケースが田中・宮崎・岡本 (2009)と同様にしばしばみられた。しかし、残存期間が長くなるに従って、混乱期においても、投資家の相場観を柔軟に抽出することができる MLN, MJD モデルの実現株価に対する整合性が BS モデルよりも高くなることが分かった。また投資家のリスク回避度を考慮したリアル分布の実現株価との整合性は、推定時点までの情報から適切なリスク回避度を推定するのは難しく、必ずしもリスク中立分布の整合性を上回るわけではないことは、分析対象を(1), (2)のように拡張した場合でも同様であった。

## 参考文献

- [1] D. T. Breeden and R.H. Litzenberger. : “Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices,” *Journal of Business*, **51**, (1978), 621-651.
- [2] M. Rubinstein. : “Implied Binomial Trees,” *The Journal of Finance*, **49**, (1994), 771-818.
- [3] Buchen, P. W. and M, Kelly. : “The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **31**, (1996), 143-159.
- [4] J. C. Jackwerth and M. Rubinstein. : “Recovering Probability Distributions from Option Prices,” *The Journal of Finance*, **51**, (1996), 1611-1631.
- [5] S. Nomura and K. Miyazaki. : “A valuation of far out-of-the-money options based on implied Normal/NIG Distributions,” *JAFEE Journal*, (2006), 3-31. (in Japanese)
- [6] R. R. Bliss and N. Panigirtzoglou. : “Option-Implied Risk Aversion Estimates,” *Journal of Finance*, **59**, (2004), 407-446.
- [7] Liu, X. , Shackleton, M. B. , Taylor, S. J. , and Xu, X. : “Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions,” *Journal of Banking and Finance*, **31**, (2007), 1501-1520.
- [8] F. Black and M. Scholes. : “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of political economy*, **81** (1973) 637-654
- [9] Ritchey, R.J. : “Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures” *Journal of Financial Economics* , **13**, (1990) 285-296
- [10] R. C. Merton, : “Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, **3**, (1976), 125-144.
- [11] 田中健太郎, 宮崎浩一, 岡本雅生: オプションモデル価格の市場価格や実現株価との整合性に関する検証, オペレーションズ・リサーチ : 経営の科学 54, (2009) 485-494